

Problemas de Cinemática del Cuerpo Rígido.

José María Rico Martínez
Departamento de Ingeniería Mecánica
Facultad de Ingeniería Mecánica, Eléctrica y Electrónica
Universidad de Guanajuato.
Salamanca, Gto. 36730, México

October 20, 2009

1 Problemas Propuestos.

Problema 1. El bloque rectangular que se muestra gira alrededor de la diagonal OA con velocidad angular constante de $6.76 \frac{rad.}{s}$. Si la rotación es en sentido contrario al de las manecillas del reloj cuando se observa desde A , determine velocidad y aceleración del punto B en el instante indicado.¹

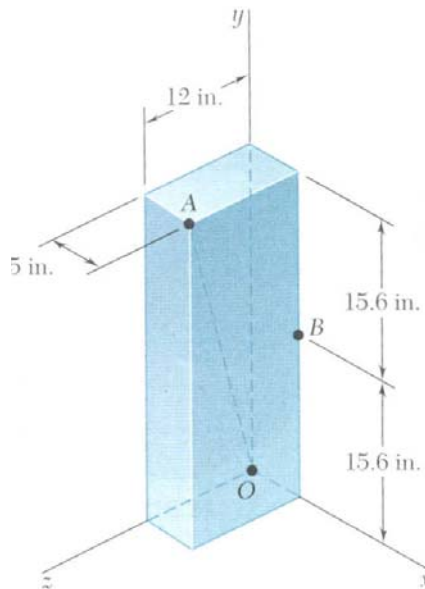


Figure 1: Gráfica de un bloque rectangular sujeto a rotación .

Solución. Primeramente encontraremos un vector unitario en la dirección del vector \vec{r}_{OA} . Se tiene que

$$\vec{r}_{A/O} = 5 \text{ in. } \hat{i} + 31.2 \text{ in. } \hat{j} + 12 \text{ in. } \hat{k}.$$

¹Este es el Problema 15.9 del libro *Mecánica Vectorial Para Ingenieros, Dinámica*. Beer, F.P., Johnston, E.R. y Clausen, W.E., Octava edición, McGraw Hill: México D.F.

Por lo tanto,

$$\hat{u}_{OA} = \frac{\vec{r}_{A/O}}{|\vec{r}_{A/O}|} = \frac{5in.\hat{i} + 31.2in.\hat{j} + 12in.\hat{k}}{\sqrt{5^2 + 31.2^2 + 12^2}} = \frac{25}{169}\hat{i} + \frac{12}{13}\hat{j} + \frac{60}{169}\hat{k}$$

De estos resultados puede calcularse el vector velocidad angular del bloque rectangular $\vec{\omega}$ como

$$\vec{\omega} = |\vec{\omega}| \hat{u}_{OA} = \left(1\hat{i} + 6.24\hat{j} + 2.4\hat{k}\right) \frac{rad.}{s.}$$

Debe notarse que esta definición del vector velocidad angular cumple con las características indicadas en la teoría de la cinemática de cuerpos rígidos.

Además como la magnitud de la velocidad angular es **constante** y el cuerpo está sujeto a rotación alrededor de un eje fijo, el vector \hat{u}_{OA} es constante y $\vec{\omega}$ **también es constante**. De aquí que

$$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt} = \vec{0}.$$

Finalmente, determinaremos \vec{r}_{OB} , pues B es el punto cuya velocidad y aceleración se desea conocer y O es un **punto a lo largo del eje de rotación**.

$$\vec{r}_{B/O} = 5in.\hat{i} + 15.6in.\hat{j} + 0in.\hat{k}.$$

Por lo tanto

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/O} = \left(1\hat{i} + 6.24\hat{j} + 2.4\hat{k}\right) \times \left(5in.\hat{i} + 15.6in.\hat{j} + 0in.\hat{k}\right) = \left(-37.44\hat{i} + 12.0\hat{j} - 15.6\hat{k}\right) \frac{in.}{s.}$$

De manera semejante,

$$\vec{a}_B = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/O} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{B/O}) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{B/O}) = \left(-126.144\hat{i} - 74.256\hat{j} + 245.6256\hat{k}\right) \frac{rad.}{s^2}.$$

Problema 2. En el problema 1, determine la velocidad y aceleración del punto B en el instante mostrado, suponiendo que la velocidad angular es de $3.38 \frac{rad.}{s.}$ y que disminuye a razón de $5.07 \frac{rad.}{s^2}$.

Solución: Del problema 1, se sabe que

$$\hat{u}_{OA} = \frac{5in.\hat{i} + 31.2in.\hat{j} + 12in.\hat{k}}{\sqrt{5^2 + 31.2^2 + 12^2}} = \frac{25}{169}\hat{i} + \frac{12}{13}\hat{j} + \frac{60}{169}\hat{k}$$

De estos resultados puede calcularse el vector velocidad angular del bloque rectangular $\vec{\omega}$ como

$$\vec{\omega} = |\vec{\omega}| \hat{u}_{OA} = \left(0.5\hat{i} + 3.12\hat{j} + 1.2\hat{k}\right) \frac{rad.}{s.}$$

Puesto que la velocidad angular está disminuyendo a razón de $5.07 \frac{rad.}{s^2}$, la aceleración angular está dado por

$$\vec{\alpha} = |\vec{\alpha}| \hat{u}_{OA} = -5.07 \left(\frac{25}{169}\hat{i} + \frac{12}{13}\hat{j} + \frac{60}{169}\hat{k}\right) = \left(-0.75\hat{i} - 4.68\hat{j} - 1.80\hat{k}\right) \frac{rad.}{s^2}.$$

De esta manera, la velocidad del punto B , está dada por

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/O} = \left(0.5\hat{i} + 3.12\hat{j} + 1.2\hat{k}\right) \times \left(5in.\hat{i} + 15.6in.\hat{j} + 0in.\hat{k}\right) = \left(-18.72\hat{i} + 6.0\hat{j} - 7.8\hat{k}\right) \frac{in.}{s.}$$

²Este es el Problema 15.10 del libro *Mecánica Vectorial Para Ingenieros, Dinámica*. Beer, F.P., Johnston, E.R. y Clausen, W.E., Octava edición, McGraw Hill: México D.F.

De manera semejante,

$$\begin{aligned}
 \vec{a}_B &= \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/O} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{B/O}) \\
 &= (-0.75 \hat{i} - 4.68 \hat{j} - 1.80 \hat{k}) \times (5 \text{ in.} \hat{i} + 15.6 \text{ in.} \hat{j} + 0 \text{ in.} \hat{k}) \\
 &\quad + (0.5 \hat{i} + 3.12 \hat{j} + 1.2 \hat{k}) \times [(0.5 \hat{i} + 3.12 \hat{j} + 1.2 \hat{k}) \times (5 \text{ in.} \hat{i} + 15.6 \text{ in.} \hat{j} + 0 \text{ in.} \hat{k})] \\
 &= (-3.456 \hat{i} - 27.564 \hat{j} + 73.1064 \hat{k}) \frac{\text{in.}}{\text{s}^2}.
 \end{aligned}$$

Problema 3. La varilla acodada $ABCD$ gira con velocidad angular constante de $75 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$ alrededor de una línea que une los puntos A y D . Si en el instante considerado la velocidad de la esquina C va hacia arriba, determine velocidad y aceleración para la esquina B .³

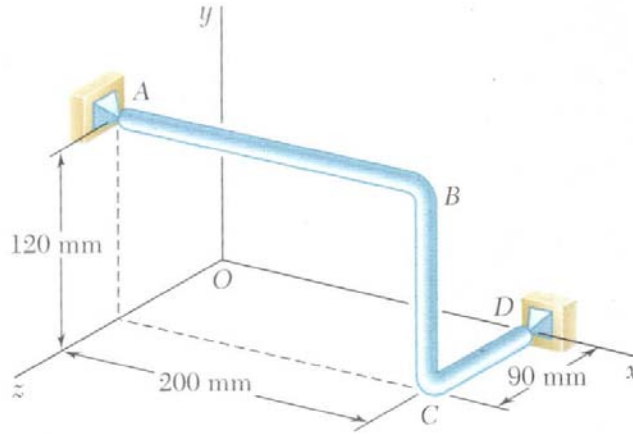


Figure 2: Barra doblada sujeta a rotación alrededor de un eje fijo.

Solucion. Primeramente determinaremos el vector de posición del punto A respecto del punto D , dado por

$$\vec{r}_{A/D} = -200 \text{ mm.} \hat{i} + 120 \text{ mm.} \hat{j} + 90 \text{ mm.} \hat{k}.$$

De manera que un vector unitario a lo largo del eje de rotación está dado por

$$\hat{u}_{DA} = \frac{\vec{r}_{A/D}}{|\vec{r}_{A/D}|} = \frac{-200 \text{ mm.} \hat{i} + 120 \text{ mm.} \hat{j} + 90 \text{ mm.} \hat{k}}{\sqrt{(-200)^2 + 120^2 + 90^2}} = -\frac{4}{5} \hat{i} + \frac{12}{25} \hat{j} + \frac{9}{25} \hat{k}$$

De estos resultados puede calcularse el vector velocidad angular del bloque rectangular $\vec{\omega}$ como

$$\vec{\omega} = \lambda |\vec{\omega}| \hat{u}_{DA} = \lambda 75 \frac{\text{rad.}}{\text{s.}} \left(-\frac{4}{5} \hat{i} + \frac{12}{25} \hat{j} + \frac{9}{25} \hat{k} \right) \frac{\text{rad.}}{\text{s.}} = (-60 \lambda \hat{i} + 36 \lambda \hat{j} + 27 \lambda \hat{k}) \frac{\text{rad.}}{\text{s.}},$$

Donde λ puede tener únicamente dos valores, es decir $\lambda \in \{1, -1\}$ e indicará el sentido de la velocidad angular. Por otro lado, el vector de posición del punto C con respecto al punto D —hay otras muchas opciones, pero esta es la mas sencilla— está dado por

$$\vec{r}_{C/D} = 0 \text{ mm.} \hat{i} + 0 \text{ mm.} \hat{j} + 90 \text{ mm.} \hat{k}.$$

³Este es el Problema 15.13 del libro *Mecánica Vectorial Para Ingenieros, Dinámica*. Beer, F.P., Johnston, E.R. y Clausen, W.E., Octava edición, McGraw Hill: México D.F.

Por lo tanto, la velocidad de C está dada por

$$\vec{v}_C = \vec{\omega} \times \vec{r}_{C/D} = \left[\lambda \left(-60 \lambda \hat{i} + 36 \lambda \hat{j} + 27 \lambda \hat{k} \right) \frac{\text{rad.}}{s.} \right] \times \left(90 \text{ mm. } \hat{k} \right) = \left(3240 \lambda \hat{i} + 5400 \lambda \hat{j} + 0 \hat{k} \right) \frac{\text{mm.}}{s.}$$

Puesto que se sabe que la velocidad del punto C va hacia arriba, en términos menos coloquiales, que la componente Y de la velocidad de C , \vec{v}_C , es positiva, resulta entonces que

$$\lambda = 1.$$

Por lo tanto, la velocidad angular de la barra doblada está dada por

$$\vec{\omega} = \left(-60 \hat{i} + 36 \hat{j} + 27 \hat{k} \right) \frac{\text{rad.}}{s.}$$

Además puesto que el vector de posición del punto B con respecto al punto A —hay otras muchas opciones, pero esta es la mas sencilla— está dado por

$$\vec{r}_{B/A} = 200 \text{ mm. } \hat{i} + 0 \text{ mm. } \hat{j} + 0 \text{ mm. } \hat{k}.$$

La velocidad del punto B está dada por

$$\vec{v}_B = \vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A} = \left[\left(-60 \hat{i} + 36 \hat{j} + 27 \hat{k} \right) \frac{\text{rad.}}{s.} \right] \times \left(200 \text{ mm. } \hat{i} \right) = \left(5400 \hat{j} - 7200 \hat{k} \right) \frac{\text{mm.}}{s.}$$

Mas aún, puesto que la magnitud de esta velocidad angular es constante y el movimiento es de rotación alrededor de un eje fijo, y por lo tanto, la dirección de la velocidad angular es también constante, se tiene que

$$\vec{\alpha} = \vec{0}.$$

Por lo tanto, la aceleración del punto B está dada por

$$\begin{aligned} \vec{a}_B &= \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/A} + \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}) = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{B/A}) = \left(-405000 \hat{i} - 432000 \hat{j} - 324000 \hat{k} \right) \frac{\text{mm.}}{s^2.} \\ &= \left(-405 \hat{i} - 432 \hat{j} - 324 \hat{k} \right) \frac{m.}{s^2.} \end{aligned}$$

Problema 4. Cuando se pone en operación, un motor alcanza su velocidad nominal de 2400 r.p.m. en 4 segundos y, al desactivarse, tarda 40 segundos para llegar al reposo. Si el movimiento es uniformemente acelerado, determine el número de revoluciones que ejecuta el motor *a)* al alcanzar la velocidad nominal, *b)* al detenerse.⁴

Solución: Para la primera parte del problema, puesto que el movimiento es uniformemente acelerado, se tiene que

$$\alpha(t) = \alpha,$$

sujeto a las condiciones iniciales, para $t = 0$, $\omega(0) = 0$ y $\theta(0) = 0$. Por lo tanto,

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha \quad \text{o} \quad \omega(t) = \alpha t + c_1$$

Sustituyendo la primera condición inicial, $c_1 = 0$, por lo que

$$\omega(t) = \alpha t$$

⁴Este es el Problema 15.5 del libro *Mecánica Vectorial Para Ingenieros, Dinámica*. Beer, F.P., Johnston, E.R. y Clausen, W.E., Octava edición, McGraw Hill: México D.F.

Si se sabe que para $t = 4$ segundos, $\omega(4) = 2400 \text{ r.p.m.} = 251.32 \frac{\text{rad.}}{\text{s.}}$, se tiene que la aceleración angular está dada por

$$\alpha = \frac{251.32 \text{ rad.}}{4 \text{ s}^2} = 62.831 \frac{\text{rad.}}{\text{s}^2}.$$

Integrando la ecuación de la velocidad angular, se tiene que

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 + c_2.$$

Sustituyendo la condición inicial para $t = 0$, $\theta(0) = 0$, se tiene que $c_2 = 0$ y

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2$$

Por lo tanto, para $t = 4 \text{ s.}$, se tiene que

$$\theta(4) = \frac{1}{2} \left(62.831 \frac{\text{rad.}}{\text{s}^2} \right) (4 \text{ s})^2 = 502.65 \text{ rad.} = 80 \text{ revoluciones.}$$

Para la segunda parte del problema, también el movimiento es uniformemente acelerado, se tiene que

$$\alpha(t) = \alpha,$$

sujeto a las condiciones iniciales, para $t = 0$, $\omega(0) = 2400 \text{ r.p.m.} = 251.32 \frac{\text{rad.}}{\text{s.}}$ y $\theta(0) = 0$. Por lo tanto,

$$\frac{d\omega}{dt} = \alpha \quad \text{o} \quad \omega(t) = \alpha t + c_3$$

Sustituyendo la primera condición inicial, $c_3 = \omega_0 = 251.32 \frac{\text{rad.}}{\text{s.}}$, por lo que

$$\omega(t) = \alpha t + \omega_0.$$

Si se sabe que para $t = 40$ segundos, $\omega(40) = 0 \text{ r.p.m.} = 0 \frac{\text{rad.}}{\text{s.}}$, se tiene que la aceleración angular está dada por

$$\alpha = -\frac{\omega_0}{t} = -\frac{251.32 \text{ rad.}}{40 \text{ s}^2} = -6.2831 \frac{\text{rad.}}{\text{s}^2}.$$

Integrando la ecuación de la velocidad angular, se tiene que

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_0 t + c_4.$$

Sustituyendo la condición inicial para $t = 0$, $\theta(0) = 0$, se tiene que $c_4 = 0$ y

$$\theta(t) = \frac{1}{2} \alpha t^2 + \omega_0 t.$$

Por lo tanto, para $t = 40 \text{ s.}$, se tiene que

$$\theta(40) = \frac{1}{2} \left(-6.2831 \frac{\text{rad.}}{\text{s}^2} \right) (40 \text{ s})^2 + \left(251.32 \frac{\text{rad.}}{\text{s.}} \right) (40 \text{ s.}) = 5026.53 \text{ rad.} = 800 \text{ revoluciones.}$$

Problema 5. La banda que se muestra en la figura 3 se mueve sin deslizamiento sobre dos poleas. La polea A parte del reposo con aceleración angular en el sentido de las manecillas del reloj, definida mediante la relación

$$\alpha = 120 - 0.002 \omega^2.$$

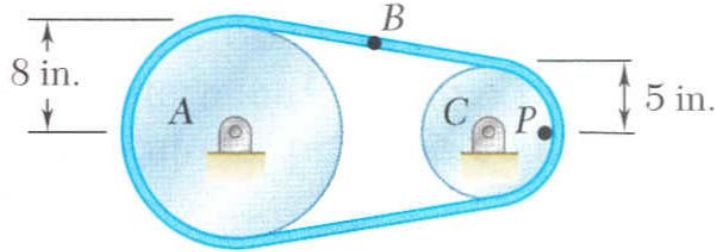


Figure 3: Banda que se mueve entre dos poleas sin deslizamiento.

donde α se expresa en $\frac{rad.}{s^2}$ y ω en $\frac{rad.}{s}$. Determine, luego de media revolución de la polea A, a) la magnitud de la aceleración del punto B sobre la banda, b) la aceleración del punto P sobre la polea C.⁵

Solución. Del análisis del movimiento del cuerpo rígido sujeto a rotación alrededor de un eje fijo, se sabe que

$$\omega_A \frac{d\omega_A}{d\theta} = \alpha_A = 120 - 0.002 \omega_A^2.$$

Por lo tanto, se tiene que para la polea A

$$\frac{\omega_A d\omega_A}{120 - 0.002 \omega_A^2} = d\theta_A \quad \text{o} \quad -\frac{1}{0.004} \int \frac{-0.004 \omega_A d\omega_A}{120 - 0.002 \omega_A^2} = \int d\theta_A$$

Entonces

$$-250 \ln(120 - 0.002 \omega_A^2) = \theta_A + c_1,$$

manipulando algebraicamente la ecuación

$$120 - 0.002 \omega_A^2 = e^{-0.004 \theta_A + c_1} = c_2 e^{-0.004 \theta_A}$$

Para determinar la constante de integración c_2 , se debe recurrir a la condición inicial, para $\omega_A = 0$, $\theta_A = 0$, entonces

$$120 - 0.002 (0)^2 = c_2 e^{-0.004(0)} = c_2 e^0 = c_2,$$

Por lo tanto, $c_2 = 120$ y

$$120 - 0.002 \omega_A^2 = 120 e^{-0.004 \theta_A} \quad \text{o} \quad \omega_A^2 = 60000 (1 - e^{-0.004 \theta_A})$$

Ahora determinaremos, la velocidad y aceleración angular de la polea A cuando ha rotado media revolución, es decir para cuando $\theta = \pi rad$. Entonces

$$\omega_A = \sqrt{60000 (1 - e^{-0.004 \pi})} = 27.3726 \frac{rad.}{s}.$$

y

$$\alpha_A = 120 - 0.002 (27.3726)^2 = 118.50 \frac{rad.}{s^2}.$$

⁵Este es el Problema 15.20 del libro *Mecánica Vectorial Para Ingenieros, Dinámica*. Beer, F.P., Johnston, E.R. y Clausen, W.E., Octava edición, McGraw Hill: México D.F.

De manera que la aceleración tangencial de un punto, P^* , de la banda en la periferia de la polea A está dada por

$$a_{tP^*} = \alpha_A r_A = \left(118.50 \frac{\text{rad.}}{\text{s}^2}\right) (8 \text{ in.}) = 948 \frac{\text{in.}}{\text{s}^2} = 79 \frac{\text{pies}}{\text{s}^2}$$

Puesto que no hay deslizamiento, esta es también la aceleración de partícula B de la banda —debe notarse que el punto B está sujeto a traslación rectilínea y por lo tanto su componente normal de aceleración es nula—, es decir

$$a_B = a_{tP^*} = 79 \frac{\text{pies}}{\text{s}^2}$$

Ahora bien, para resolver el problema del punto P sobre la polea C , es necesario recordar que el movimiento de la banda sobre las poleas ocurre sin deslizamiento, por lo tanto, se tiene que

1. Las magnitudes de las velocidades de los puntos P^* , de la banda localizado en la periferia de la polea A y el punto P de la banda localizado en la periferia de la polea C tienen la misma magnitud, por lo tanto

$$\omega_A r_A = \omega_C r_C \quad \omega_C = \omega_A \frac{r_A}{r_C} = 43.796 \frac{\text{rad.}}{\text{s}}$$

2. Las magnitudes de las aceleraciones tangenciales de los puntos P^* , de la banda localizado en la periferia de la polea A y el punto P de la banda localizado en la periferia de la polea C tienen la misma magnitud, por lo tanto

$$\alpha_A r_A = \alpha_C r_C \quad \alpha_C = \alpha_A \frac{r_A}{r_C} = 189.6 \frac{\text{rad.}}{\text{s}^2}$$

Por lo tanto, la aceleración del punto C está dada por

$$\begin{aligned} \vec{a}_P &= \vec{\alpha}_C \times \vec{r}_{P/O} + \vec{\omega}_C \times (\vec{\omega}_C \times \vec{r}_{P/O}) = \vec{\alpha}_C \times \vec{r}_{P/O} - |\vec{\omega}_C|^2 \vec{r}_{P/O} \\ &= (-189.6 \hat{k}) \times (5 \text{ in.} \hat{i}) - (43.796)^2 (5 \text{ in.} \hat{i}) = (-948 \hat{j} - 9590 \hat{i}) \frac{\text{in.}}{\text{s}^2} \end{aligned}$$

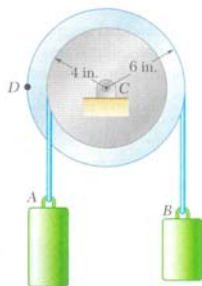


Figure 4: Polea compuesta con dos cargas.

Problema 5. Una polea y dos bloques se conectan mediante cuerdas inextensibles como se indica en la figura 4. La polea parte desde el reposo en $t = 0$ y se acelera a una razón uniforme de

$2.4 \frac{rad}{s^2}$ en el sentido de las manecillas del reloj. En $t = 4 s$, determine la velocidad y posición de a) la carga A , b) la carga B .⁶

Solución: Considere dos puntos coincidentes, P_A , uno localizado en la polea y otro localizado en la cuerda inextensible que conecta la polea con la carga A justo en el punto donde la cuerda deja de estar enrollada y se hace vertical; similarmente, considere otro par de puntos coincidentes, P_B , uno localizado en la polea y otro localizado en la cuerda inextensible que conecta la polea con la carga B justo en el punto donde la cuerda deja de estar enrollada y se hace vertical. En ambos casos, entre el par de puntos no hay deslizamiento. Por lo tanto,

$$\vec{v}_{P_A \text{ polea}} = \vec{v}_{P_A \text{ cuerda}} \quad y \quad \vec{v}_{P_B \text{ polea}} = \vec{v}_{P_B \text{ cuerda}} \quad \forall t \geq 0.$$

Similarmente,

$$\vec{a}_{tP_A \text{ polea}} = \vec{a}_{tP_A \text{ cuerda}} \quad y \quad \vec{a}_{tP_B \text{ polea}} = \vec{a}_{tP_B \text{ cuerda}} \quad \forall t \geq 0.$$

Además, debe notarse que las velocidades y las aceleraciones tangenciales de los puntos que pertenecen a las cuerdas, son las velocidades y aceleraciones de las cargas. Además, aplicando el concepto de placa representativa, para la carga A , se tiene que

$$\vec{v}_A = \vec{v}_{P_A \text{ cuerda}} = \vec{v}_{P_A \text{ polea}} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P_A/O} \quad y \quad \vec{a}_A = \vec{a}_{tP_A \text{ cuerda}} = \vec{a}_{tP_A \text{ polea}} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P_A/O}.$$

De manera semejante, para la carga B , se tiene que

$$\vec{v}_B = \vec{v}_{P_B \text{ cuerda}} = \vec{v}_{P_B \text{ polea}} = \vec{\omega} \times \vec{r}_{P_B/O} \quad y \quad \vec{a}_B = \vec{a}_{tP_B \text{ cuerda}} = \vec{a}_{tP_B \text{ polea}} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P_B/O}.$$

Este resultado indica que si la polea inicia su movimiento a partir del reposo, entonces las cargas A y B también inician su movimiento a partir del reposo. Todavía mas, las aceleraciones uniformes de las cargas A y B están dadas por

$$\vec{v}_A = \vec{a}_{tP_A \text{ cuerda}} = \vec{a}_{tP_A \text{ polea}} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P_A/O} = -2.4 \frac{rad}{s^2} \hat{k} \times \left(-\frac{1}{3} pie \right) \hat{i} = 0.8 \frac{pie}{s^2} \hat{j}.$$

Similarmente

$$\vec{a}_{tP_B \text{ cuerda}} = \vec{a}_{tP_B \text{ polea}} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{P_B/O} = -2.4 \frac{rad}{s^2} \hat{k} \times \left(\frac{1}{2} pie \right) \hat{i} = -1.2 \frac{pie}{s^2} \hat{j}.$$

Usando los métodos de cinemática de la partícula, se tiene que

$$\vec{v}_A = \vec{a}_A t = 0.8 \frac{pie}{s^2} \hat{j} (4 s) = 3.2 \frac{pie}{s} \hat{j}, \quad y \quad \vec{r}_A = \frac{1}{2} \vec{a}_A t^2 = \frac{1}{2} 0.8 \frac{pie}{s^2} \hat{j} (4 s)^2 = 6.4 pie \hat{j}.$$

de manera semejante

$$\vec{v}_B = \vec{a}_B t = -1.2 \frac{pie}{s^2} \hat{j} (4 s) = -4.8 \frac{pie}{s} \hat{j}, \quad y \quad \vec{r}_B = \frac{1}{2} \vec{a}_B t^2 = \frac{1}{2} \left(-1.2 \frac{pie}{s^2} \right) \hat{j} (4 s)^2 = -9.6 pie \hat{j}.$$

Problema 6. Dos discos de fricción A y B se pondrán en contacto sin deslizamiento cuando la velocidad angular del disco A sea de 240 r.p.m. en sentido contrario a las manecillas del reloj, vea la figura 5. El disco A empieza su movimiento desde el reposo en el tiempo $t = 0$ y se le imprime una aceleración angular constante de magnitud α . El disco B parte del reposo en $t = 2 s$ y se le imparte una aceleración angular constante en el sentido de las manecillas del reloj, también de

⁶Este es el Problema 15.30 del libro *Mecánica Vectorial Para Ingenieros, Dinámica*. Beer, F.P., Johnston, E.R. y Clausen, W.E., Octava edición, McGraw Hill: México D.F.

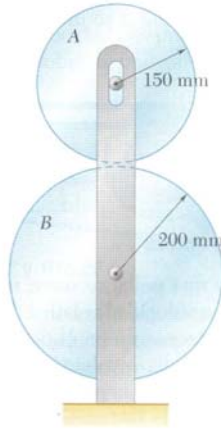


Figure 5: Dos discos de fricción.

magnitud α . Determine *a)* la magnitud de la aceleración angular α requerida, *b)* el tiempo al cual ocurre el contacto.⁷

Solución: Determinaremos las ecuaciones de movimiento de los discos de fricción. Para el disco *A*, se tiene que

$$\vec{\alpha}_A(t) = \alpha \hat{k}$$

Por lo tanto, si para $t = 0$, se tiene que $\vec{\omega}_A = \vec{0}$, se tiene que

$$\vec{\omega}_A(t) = \alpha t \hat{k}$$

De manera semejante, se tiene que

$$\vec{\alpha}_B(t) = -\alpha \hat{k}$$

Por lo tanto, si para $t = 2$ s, se tiene que $\vec{\omega}_B = \vec{0}$, se tiene que

$$\vec{\omega}_A(t) = -\alpha (t - 2) \hat{k}$$

Por lo tanto, la velocidad de los puntos, *P*, en la periferia de los discos *A* y *B*, donde los discos se ponen en contacto,⁸ están dados por

$$\vec{v}_{P_A} = \vec{\omega}_A(t) \times \vec{r}_{P/O_A} = \alpha t \hat{k} \times (-0.15 \text{ m}) \hat{j} = 0.15 \alpha t \hat{i}$$

y

$$\vec{v}_{P_B} = \vec{\omega}_B(t) \times \vec{r}_{P/O_B} = -\alpha (t - 2) \hat{k} \times (0.2 \text{ m}) \hat{j} = 0.2 \alpha (t - 2) \hat{i}$$

Por lo tanto, si los discos se ponen en contacto sin deslizamiento, se tiene que

$$0.15 \alpha t = 0.2 \alpha (t - 2)$$

Por otro lado, se sabe que este contacto ocurre cuando la velocidad del disco *A* es de 240 r.p.m. en sentido contrario a las manecillas del reloj, es decir

$$\alpha t = 240 \text{ r.p.m.} = 25.1327 \frac{\text{rad}}{\text{s}}$$

⁷Este es el Problema 15.31 del libro *Mecánica Vectorial Para Ingenieros, Dinámica*. Beer, F.P., Johnston, E.R. y Clausen, W.E., Octava edición, McGraw Hill: México D.F.

⁸Nuevamente se aplicará el concepto de placa representativa.

Despejando, t en esta segunda ecuación y sustituyendolo en la primera ecuación, se tiene que

$$0.15 \alpha \frac{25.1327 \frac{rad}{s}}{\alpha} = 0.2 \alpha \left(\frac{25.1327 \frac{rad}{s}}{\alpha} - 2 \right) \quad \text{o} \quad 3.7699 \frac{rad}{s} = 5.02654 \frac{rad}{s} - 0.4 \alpha$$

Por lo tanto

$$\alpha = 3.1416 \frac{rad}{s^2}.$$

Por lo tanto, el tiempo para el cual se ponen el contacto está dado por

$$t = \frac{25.1327 \frac{rad}{s}}{\alpha} = \frac{25.1327 \frac{rad}{s}}{3.1416 \frac{rad}{s^2}} = 7.9999 s.$$

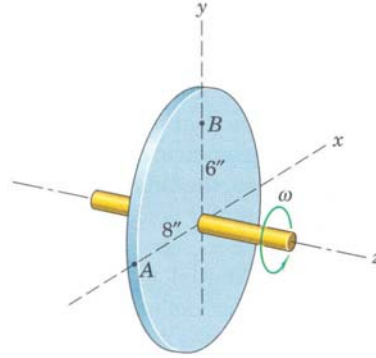


Figure 6: Disco Rotante.

Problema 7. El disco circular mostrado en la figura 6 gira alrededor de su eje z con una velocidad angular en la dirección mostrada. En un cierto instante, la magnitud de la velocidad del punto A es de $10 \frac{pie}{s}$ y está decreciendo a una velocidad de $24 \frac{pie}{s^2}$. Escriba las expresiones vectoriales para la aceleración angular $\vec{\alpha}$ del disco y la aceleración total del punto B en ese instante.⁹

Solución. Note que en este caso la aplicación del concepto de placa representativa es inmediato. De hecho, los puntos A y B están en la misma cara del disco, se empleará, además, un punto O , localizado en la intersección del eje z —el eje de rotación— y la misma cara del disco, de manera que

$$\vec{r}_{A/O} = -\frac{2}{3} pie \hat{i} \quad \text{y} \quad \vec{r}_{B/O} = \frac{1}{2} pie \hat{j}$$

Por otro lado, se sabe que

$$\vec{\omega} = \omega \hat{k},$$

donde por la dirección de rotación $\omega > 0$, además, se sabe que

$$\vec{v}_A = \lambda 10 \frac{pie}{s} \hat{j} \quad \text{y} \quad \vec{a}_{tA} = \lambda 24 \frac{pie}{s^2} \hat{j}.$$

donde $\lambda \in \{-1, 1\}$, y además se sabe que los sentidos de \vec{v}_A y \vec{a}_{tA} son opuestos.

⁹Este es el Problema 5/23 del libro *Engineering Mechanics: Dynamics, Sixth Edition*. Meriam, J. L. and Kraige, L. G. [2007], John Wiley: New York.

Aplicando las ecuaciones que permiten conocer las velocidades y aceleraciones de las partículas de un cuerpo rígido sujeto a rotación alrededor de un eje fijo, se tiene que

$$\vec{v}_A = \omega \times \vec{r}_{A/O} \quad \text{o} \quad \lambda 10 \frac{pie}{s} \hat{j} = \omega \hat{k} \times \left(-\frac{2}{3} pie \hat{i} \right) \quad \text{o} \quad \lambda 10 \frac{pie}{s} \hat{j} = -\frac{2}{3} pie \omega \hat{j}$$

Por lo tanto,

$$\lambda = -1 \quad \omega = 15 \frac{rad}{s} \quad \text{y} \quad \vec{v}_A = -10 \frac{pie}{s} \hat{j}$$

De manera semejante, puesto que los sentidos de \vec{v}_A y \vec{a}_{tA} son opuestos, se tiene que

$$\vec{a}_{tA} = 24 \frac{pie}{s^2}$$

De manera que

$$\vec{a}_{tA} = 24 \frac{pie}{s^2} = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{A/O} = \alpha \hat{k} \times \left(-\frac{2}{3} pie \hat{i} \right) = -\frac{2}{3} \alpha \hat{j}$$

Por lo tanto

$$\alpha = -36 \frac{rad}{s^2} \quad \text{y} \quad \vec{\alpha} = -36 \frac{rad}{s^2} \hat{k}.$$

Finalmente, la aceleración total del punto B está dada por

$$\vec{a}_B = \vec{\alpha} \times \vec{r}_{B/O} - \omega^2 \vec{r}_{B/O} = -36 \frac{rad}{s^2} \hat{k} \times \frac{1}{2} pie \hat{j} - \left(15 \frac{rad}{s} \right)^2 \frac{1}{2} pie \hat{j} = 18 \frac{pie}{s^2} \hat{i} - 112.5 \frac{pie}{s^2} \hat{j}$$

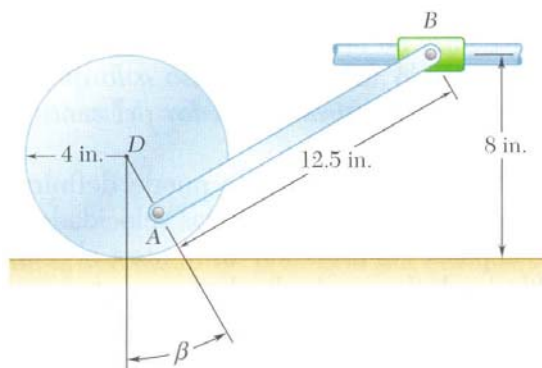


Figure 7: Mecanismo con disco rodando.

Problema 8. La rueda de $r = 4$ pulgadas de radio que se muestra en la figura 7 gira hacia la “izquierda”, en sentido contrario a las manecillas del reloj, de tal manera que su centro D tiene una velocidad de 45 pulgadas/segundo y **rueda sin deslizar**. Si la distancia AD es de 2.5 pulgadas, determine la velocidad del collarín y la velocidad angular de la varilla AB cuando *a)* $\beta = 0^\circ$, *b)* $\beta = 90^\circ$.¹⁰

Solución: Aquí resolveremos exclusivamente el inciso *a)*. Si se denomina P el punto de la rueda que está en contacto con el piso, se tiene que si el disco rueda sin deslizar

$$\vec{v}_{P/disco} = \vec{v}_{P/piso} = \vec{0}, \quad \text{y} \quad \vec{a}_{tP/disco} = \vec{a}_{tP/piso} = \vec{0}.$$

¹⁰Este es el Problema 15.70 del libro *Mecánica Vectorial Para Ingenieros, Dinámica*. Beer, F.P., Johnston, E.R. y Clausen, W.E., Octava edición, McGraw Hill: México D.F.

Cuando $\beta = 0^\circ$, los vectores de posición están dados por

$$\vec{r}_{D/P} = 4\text{pulg.}\hat{j} \quad \vec{r}_{A/D} = -2.5\text{pulg.}\hat{j} \quad \vec{r}_{B/A} = 10.677\text{pulg.}\hat{i} + 6.5\text{pulg.}\hat{j}.$$

Es importante señalar que el movimiento de rodadura entre dos cuerpos es un caso particular de movimiento plano general. Si la rodadura entre dos cuerpos es sin deslizamiento, las velocidades de los dos puntos de contacto y coincidentes, uno perteneciente a un cuerpo y otro perteneciente a otro cuerpo, tienen la misma velocidad y la misma componente tangencial de la aceleración. En el caso particular de un disco que rueda sin deslizar sobre un plano, se tiene que el desplazamiento, s , del punto D , que es el centro del disco, y el ángulo de rotación del disco, θ , están relacionados por

$$s = r\theta$$

donde r es el radio del disco y los sentidos del desplazamiento y del ángulo de rotación son “congruentes”. Derivando con respecto al tiempo esta expresión, puesto que r es constante, se tiene que

$$|\vec{v}_D| = t\omega$$

donde $\omega = \dot{\theta}$ es la velocidad angular del disco. De manera similar, una segunda derivación conduce a —el punto D se mueve a lo largo de una línea recta, de manera que no tiene aceleración normal—.

$$|\vec{a}_D| = t\alpha$$

donde $\alpha = \dot{\omega} = \ddot{\theta}$. Es importante indicar que las direcciones de la velocidad y la aceleración están relacionadas con las direcciones de la velocidad angular y la aceleración angular respectivamente.

De acuerdo a la definición del movimiento de rodadura sin deslizamiento, se tiene que

$$\vec{v}_{P/disco} = \vec{0}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \vec{v}_{D/disco} &= \vec{v}_{P/disco} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{D/P} \\ -45 \frac{\text{pulg.}}{s} \hat{i} &= \vec{0} + \omega \hat{k} \times 4\text{pulg.}\hat{j} = -4\omega \text{pulg.}\hat{i}. \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\omega = \frac{-45 \frac{\text{pulg.}}{s}}{-4 \text{pulg.}} = 11.25 \frac{\text{rad.}}{s} \quad \text{y} \quad \vec{\omega} = 11.25 \frac{\text{rad.}}{s} \hat{k}.$$

Ahora determinaremos la velocidad del punto A ,

$$\vec{v}_{A/disco} = \vec{v}_{D/disco} + \vec{\omega} \times \vec{r}_{A/D} = -45 \frac{\text{pulg.}}{s} \hat{i} + \left(11.25 \frac{\text{rad.}}{s} \hat{k}\right) \times \left(-2.5 \text{pulg.}\hat{j}\right) = -16.875 \frac{\text{pulg.}}{s} \hat{i}$$

Además

$$\vec{v}_{A/disco} = \vec{v}_{A/AB}$$

Estamos ahora en posición para obtener la velocidad del collarín B y la velocidad angular de la barra AB . Debe notarse que

$$\begin{aligned} \vec{v}_{B/AB} &= \vec{v}_{B/collar} \\ \vec{v}_{A/AB} + \vec{\omega}_{AB} \times \vec{r}_{B/A} &= v_B \hat{i} \\ -16.875 \frac{\text{pulg.}}{s} \hat{i} + \left(\omega_{AB} \hat{k}\right) \times \left(10.677\text{pulg.}\hat{i} + 6.5\text{pulg.}\hat{j}\right) &= v_B \hat{i} \end{aligned}$$

Las ecuaciones escalares que resultan de la ecuación vectorial son

$$-16.875 \frac{\text{pulg.}}{s} - \omega_{AB} 6.5 \text{ pulg.} = v_B,$$

y

$$0 + \omega_{AB} 10.677 \text{ pulg.} = 0.$$

Por lo tanto

$$\omega_{AB} = 0 \quad \text{y} \quad v_B = -16.875 \frac{\text{pulg.}}{s}.$$

o en términos vectoriales

$$\vec{\omega} = \vec{0} \quad \text{y} \quad \vec{v}_B = -16.875 \frac{\text{pulg.}}{s} \hat{i}.$$