Cinética de Cuerpos Rígidos: Métodos de Impulso e Ímpetu.

José María Rico Martínez
Departamento de Ingeniería Mecánica.
Universidad de Guanajuato, F. I. M. E. E.
Carretera Salamanca-Valle de Santiago Km. 3.8 + 1.5
CP 36730, Salamanca, Gto., México
E-mail: `jrico@salamanca.ugto.mx`

Alejandro Tadeo Chávez
Departamento de Ingeniería Mecatrónica.
Instituto Tecnológico Superior de Irapuato
Carretera Irapuato-Silao Km. 12.5
CP 36614, Irapuato, Gto., México
E-mail: `altadeo@itesi.edu.mx`

1 Introducción.

En estas notas, se presentan los fundamentos de la aplicación del método de impulso e ímpetu a la cinética de los cuerpos rígidos, incluyendo un repaso inicial del método de impulso e ímpetu, este último término también conocido como cantidad de movimiento o momento lineal, para partículas. Después de ese repaso inicial, la tarea de aplicar el método a cuerpos rígidos es relativamente sencilla restando exclusivamente tres tareas:

1. Determinación del impulso lineal de un cuerpo rígido sujeto a movimiento plano general.
2. Determinación del impulso angular de un cuerpo rígido sujeto a movimiento plano general.
3. Mostrar que la contribución de las fuerzas internas, cuando un cuerpo rígido sufre un desplazamiento Euclideo o de cuerpo rígido, a la determinación del ímpetu lineal y angular de un cuerpo rígido es nulo.

Es importante hacer notar que, a diferencia de las notas **Cinética de Cuerpos Rígidos: Ecuaciones de Newton-Euler**, en estas notas se supone de inmediato la restricción de que cuerpo rígido está sujeto a movimiento plano general.

2 Revisión del método de impulso e ímpetu para partículas.

Considere una partícula de masa **constante** m, localizada en el punto P, sobre la que actúa una fuerza $\vec{F}$, la segunda ley de Newton indica que

$$\vec{F} = m\,\vec{a} = m\,\frac{d}{d\,t}\vec{v} = \frac{d}{d\,t}\,(m\,\vec{v}) = \frac{d}{d\,t}\vec{L} = \dot{\vec{L}}. \tag{1}$$

donde $\vec{L} = m\,\vec{v}$ es la cantidad de movimiento lineal de la partícula, momento lineal o ímpetu. Separando variables, la ecuación puede expresarse como

$$\vec{F}\,dt = d\,(m\,\vec{v})$$

e integrando respecto al tiempo, se tiene que

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = m\vec{v}(t_2) - m\vec{v}(t_1) = m\vec{v}_2 - m\vec{v}_1 = \vec{L}_2 - \vec{L}_1 \tag{2}$$

Rearreglando los términos, la forma final de la ecuación está dada por

$$m\vec{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = m\vec{v}_2 \quad \text{o} \quad \vec{L}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \vec{L}_2 \tag{3}$$

La ecuación (3) indica que la suma del ímpetu, cantidad de movimiento o momento lineal, para el tiempo, t_1, mas la integral, respecto al tiempo, de la fuerza $\vec{F}$ aplicada a la partícula, también conocida como “impulso”, es igual al ímpetu, cantidad de movimiento o momento lineal, para el tiempo, t_2.

Es importante señalar que puesto que esta ecuación se obtuvo a partir de la segunda Ley de Newton, entonces las velocidades que aparecen en todas las ecuaciones derivadas deben ser respecto a un sistema de referencia newtoniano o inercial. Mas aún, si por alguna razón

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \vec{0},$$

la ecuación (3) se reduce a

$$\vec{L}_1 = m\vec{v}_1 = m\vec{v}_2 = \vec{L}_2. \tag{4}$$

Esta ecuación frecuentemente se conoce como la **ley de conservación del momento lineal de una partícula**.

Ahora analizaremos con mas detalle, la integral de la fuerza con respecto al tiempo, denominándola $\mathbf{Imp}_{1\to 2}$, asi pues, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{Imp}_{1\to 2} &\equiv \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\,dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(F_x\hat{i} + F_y\hat{j} + F_z\hat{k}\right)\,dt \\ &= \hat{i}\int_{t_1}^{t_2} F_x\,dt + \hat{j}\int_{t_1}^{t_2} F_y\,dt + \hat{k}\int_{t_1}^{t_2} F_z\,dt. \end{aligned} \tag{5}$$

Sustituyendo la ecuación (5) en la ecuación (3) e introduciendo los componentes escalares de las cantidades de movimiento, se tiene que

$$\left(\hat{\imath}\, mv_{x1} + \hat{\jmath}\, mv_{y1} + \hat{k}\, mv_{z1}\right) \quad + \quad \left(\hat{\imath} \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt + \hat{\jmath} \int_{t_1}^{t_2} F_y\, dt + \hat{k} \int_{t_1}^{t_2} F_z\, dt\right)$$
$$= \left(\hat{\imath}\, mv_{x2} + \hat{\jmath}\, mv_{y2} + \hat{k}\, mv_{z2}\right). \tag{6}$$

Descomponiendo esta ecuación en términos de sus componentes a lo largo de las direcciones x, y y z, se tiene que

$$mv_{x1} + \int_{t_1}^{t_2} F_x\, dt = mv_{x2} \tag{7}$$
$$mv_{y1} + \int_{t_1}^{t_2} F_y\, dt = mv_{y2} \tag{8}$$
$$mv_{z1} + \int_{t_1}^{t_2} F_z\, dt = mv_{z2} \tag{9}$$

Estas son las componentes cartesianas de la ecuación del método de impulso e ímpetu. Ciertamente es posible descomponer la ecuación en otras diferentes maneras.

2.1 Momento Angular de una Partícula.

Considere ahora un punto O, entonces es posible definir el **momento angular de la partícula de masa** m **con respecto al punto** O, como

$$\vec{H}_O \equiv \vec{r}_{P/O} \times (m\, \vec{v}) = m\, \vec{r}_{P/O} \times \vec{v}. \tag{10}$$

donde $\vec{r}_{P/O}$ es el vector de posición de la partícula de masa m localizada en el punto P respecto al punto O.

La ecuación (1), al inicio de estas notas, muestra que la segunda ecuación de Newton puede obtenerse derivando el ímpetu, cantidad de movimiento o momento lineal respecto al tiempo. Parece pues razonable investigar que se obtiene de derivar el momento angular mostrado en la ecuación (10). Suponiendo que la masa m es constante

$$\frac{d}{d\,t}\vec{H}_O = \frac{d}{d\,t}\left(m\, \vec{r}_{P/O} \times \vec{v}\right) = m\, \frac{d\,\vec{r}_{P/O}}{d\,t} \times \vec{v} + m\, \vec{r}_{P/O} \times \frac{d\,\vec{v}}{d\,t}. \tag{11}$$

Si se supone que el punto O es un punto fijo a un sistema de referencia Newtoniano o inercial, se tiene que la ecuación (11) puede escribirse como

$$\frac{d}{d\,t}\vec{H}_O = m\, \vec{v} \times \vec{v} + m\, \vec{r}_{P/O} \times \vec{a} = \vec{r}_{P/O} \times m\vec{a}. \tag{12}$$

Sin embargo, de la segunda Ley de Newton, se tiene que

$$\vec{F} = m\, \vec{a}, \tag{13}$$

donde $\vec{F}$ es la fuerza aplicada sobre la partícula P, de manera que la ecuación (12) puede escribirse como

$$\frac{d}{d\,t}\vec{H}_O = \vec{r}_{P/O} \times \vec{F} = \vec{M}_O. \tag{14}$$

donde $\vec{M}_O$ representa el momento de las fuerza aplicada a la partícula de masa m localizada en el punto P respecto al punto O fijo en un sistema de referencia Newtoniano o inercial.

De nueva cuenta, es posible separar las variables de la ecuación (14) e integrar, con respecto al tiempo, ambos lados de la ecaución

$$\int_{t_1}^{t_2} d\,\vec{H}_O = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O\,d\,t. \tag{15}$$

de esa manera se obtiene que

$$\vec{H}_O(t_2) - \vec{H}_O(t_1) = \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O\,d\,t \quad \text{o} \quad \vec{H}_O(t_2) = \vec{H}_O(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O\,d\,t \tag{16}$$

Esta es la ecuación del momento angular de una partícula libre de moverse en el espacio. Si por alguna razón, por ejemplo, si la fuerza aplicada sobre la partícula de masa m siempre pasa por el punto O, se tiene que

$$\int_{t_1}^{t_2} \vec{M}_O\,d\,t = 0,$$

y la ecuación (16) se reduce a

$$\vec{H}_O(t_2) = \vec{H}_O(t_1). \tag{17}$$

Esta ecuación frecuentemente se conoce como la **ley de conservación del momento angular de una partícula**.

3 Determinación del Impulso o Cantidad de Movimiento Lineal de un Cuerpo Rígido Sujeto a Movimiento Plano General.

De la cinética de partículas es bien conocido que el impulso o cantidad de movimiento de una partícula está dada por

$$\vec{L} = m\,\vec{v}. \tag{18}$$

Por lo tanto, el impulso o cantidad de movimiento de un cuerpo rígido B, denotada por $\vec{L}$, está dada por

$$\vec{L} = \int_B \vec{v}_M\,dm, \tag{19}$$

donde $d\,m$ es la diferencial de masa de una partícula arbitraria del cuerpo rígido B. Expresando la velocidad de la partícula en términos de la velocidad del centro de masas, vea la figura 1 se tiene que

$$\vec{v}_M = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_{M/G} \tag{20}$$

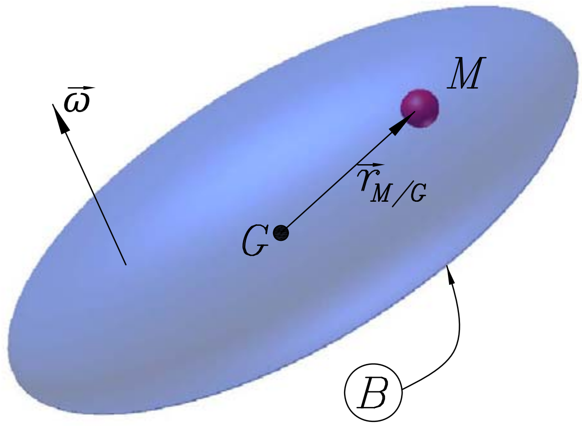

Figure 1: Relación de las Velocidades de los Puntos G y M.

por lo tanto, la ecuación (19) se reduce a

$$\vec{L} = \int_B \left(\vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_{M/G}\right)\, dm = \vec{v}_G \int_B dm + \vec{\omega} \times \int_B \vec{r}_{M/G}\, dm = M\, \vec{v}_G \tag{21}$$

donde $M = \int_B dm$ es la masa total del cuerpo B y se ha sustituido la ecuación

$$\vec{Q}_G = \int_B \vec{r}_{M/G}\, dm = \vec{0} \tag{22}$$

La ecuación (21) permite determinar el impulso o cantidad de movimiento lineal del cuerpo rígido B.

4 Determinación del Impulso o Cantidad de Movimiento Angular de un Cuerpo Rígido Sujeto a Movimiento Plano General.

En esta sección se determinará el impulso o cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido sujeto a movimiento plano general.

De la cinética de partículas es bien conocido que el impulso o cantidad de movimiento angular de una partícula está dada por la ecuación (10), repetida a continuación

$$\vec{H}_O \equiv \vec{r}_{M/O} \times (m\, \vec{v}) = m\, \vec{r}_{P/O} \times \vec{v}.$$

donde $\vec{r}_{M/O}$ es el vector de posición de la partícula de masa m localizada en el punto M respecto al punto O. Expresando la velocidad de la partícula en términos de la velocidad del centro de masas, vea la figura 1 se tiene que repitiendo la ecuación (20)

$$\vec{v}_M = \vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_{M/G},$$

de manera semejante, el vector de posición $\vec{r}_{M/O}$ puede escribirse como

$$\vec{r}_{M/O} = \vec{r}_{G/O} + \vec{r}_{M/G} \tag{23}$$

por lo tanto, el impulso o cantidad de movimiento angular de un cuerpo rígido sujeto a movimiento plano general, con respecto al punto O, está dado por

$$\begin{aligned}
\vec{H}_O &= \int_B \vec{r}_{M/O} \times \left(\vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_{M/G}\right)\, dm = \int_B \left(\vec{r}_{G/O} + \vec{r}_{M/G}\right) \times \left(\vec{v}_G + \vec{\omega} \times \vec{r}_{M/G}\right)\, dm \\
&= \vec{r}_{G/O} \times \vec{v}_G \int_B dm + \vec{r}_{G/O} \times \left(\vec{\omega} \times \int_B \vec{r}_{M/G}\, dm\right) + \left(\int_B \vec{r}_{M/G}\, dm\right) \times \vec{v}_G \\
&\quad + \int_B \vec{r}_{M/G} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{M/G}\right)\, dm
\end{aligned} \tag{24}$$

Sin embargo, por la definición del centro de masas, se tiene que

$$\int_B \vec{r}_{M/G}\, dm = \vec{0}$$

Por lo tanto, se tiene que el impulso angular está dado por

$$\vec{H}_O = \vec{r}_{G/O} \times \vec{v}_G \int_B dm + \int_B \vec{r}_{M/G} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{M/G}\right)\, dm \tag{25}$$

Por un lado, se tiene que

$$\vec{r}_{G/O} \times \vec{v}_G \int_B dm = M \vec{r}_{G/O} \times \vec{v}_G. \tag{26}$$

Por el otro lado, se tiene que

$$\begin{aligned}
\int_B \vec{r}_{M/G} \times \left(\vec{\omega} \times \vec{r}_{M/G}\right)\, dm &= \omega_x \int_B \vec{r}_{M/G} \times \left(\hat{i} \times \vec{r}_{M/G}\right)\, dm \\
&\quad + \omega_y \int_B \vec{r}_{M/G} \times \left(\hat{j} \times \vec{r}_{M/G}\right)\, dm \\
&\quad + \omega_z \int_B \vec{r}_{M/G} \times \left(\hat{k} \times \vec{r}_{M/G}\right)\, dm. \\
&= \begin{bmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix}_G \begin{bmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{bmatrix} = I_G\, \vec{\omega}.
\end{aligned} \tag{27}$$

Sustituyendo estos dos resultados en la ecuación (25), se tiene que

$$\vec{H}_O = M \vec{r}_{G/O} \times \vec{v}_G + I_G\, \vec{\omega}. \tag{28}$$

En particular, si el punto O coincide con el centro de masas G del cuerpo rígido, entonces

$$\vec{r}_{G/O} = \vec{0},$$

y la ecuación (28) se reduce a

$$\vec{H}_G = I_G\, \vec{\omega}. \tag{29}$$

5 Contribución de las fuerzas internas aplicadas de un cuerpo rígido al impulso lineal y angular de un cuerpo rígido.

Considere un cuerpo rígido B y dos partículas arbitrarias P_i y P_j del cuerpo rígido. Es bien conocido que las fuerzas internas producidas por una partícula sobre la otra tienen la misma magnitud, sentidos contrarios y son colineales, vea la figura 2.

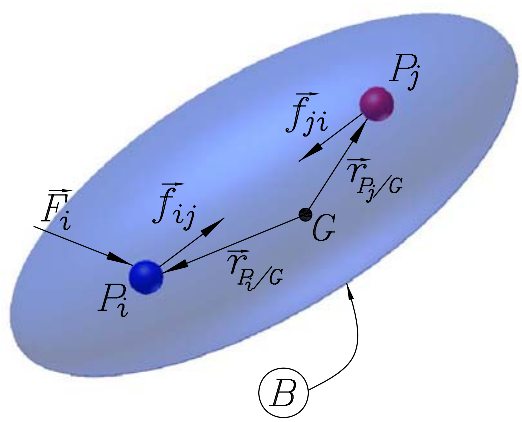

Figure 2: Determinación de la Contribución de las Fuerzas Internas de un Cuerpo Rígido al Impulso Lineal y Angular.

Entonces, consideraremos la contribución de esta pareja de fuerzas al impulso lineal y angular de un cuerpo rígido.

Para el impulso lineal, considere la ecuación

$$\vec{L} = \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}_{ij}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{f}_{ji}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{f}_{ij} - \vec{f}_{ij}\right) dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{0}\, dt = \vec{0}. \tag{30}$$

Para el impulso angular respecto a un punto arbitrario O, considere la ecuación

$$\begin{aligned} \vec{H}_O &= \int_{t_1}^{t_2} \vec{r}_{P_i/O} \times \vec{f}_{ij}\, dt + \int_{t_1}^{t_2} \vec{r}_{P_j/O} \times \vec{f}_{ji}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{r}_{P_i/O} \times \vec{f}_{ij} - \vec{r}_{P_j/O} \times \vec{f}_{ij}\right) dt \\ &= \int_{t_1}^{t_2} \left(\vec{r}_{P_i/O} - \vec{r}_{P_j/O}\right) \times \vec{f}_{ij}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{r}_{P_i/P_j} \times \vec{f}_{ij}\, dt = \int_{t_1}^{t_2} \vec{0}\, dt = \vec{0}. \end{aligned} \tag{31}$$

donde, a partir de la ecuación,

$$\vec{r}_{P_i/O} - \vec{r}_{P_j/O} = \vec{r}_{P_i/O} + \vec{r}_{O/P_j} = \vec{r}_{P_i/P_j}$$

se concluye que

$$\vec{r}_{P_i/P_j} \times \vec{f}_{ij} = \vec{0},$$

pues los vectores son colineales.

Extendiendo estos resultados para la totalidad de parejas de puntos del cuerpo rígido B, se concluye que la contribución de las fuerzas internas aplicadas de un cuerpo rígido al impulso lineal y angular de un cuerpo rígido es nulo. Por lo tanto, es unicamente necesario considerar la contribución de las fuerzas externas aplicadas al cuerpo rígido B.

6 Determinación de las Ecuaciones de Impulso Lineal y Angular Para un Cuerpo Rígido.

En la parte final de estas notas, haremos uso de los resultados previos para encontrar las ecuaciones de impulso lineal y angular para un cuerpo rígido. En primer lugar consideraremos el impulso lineal, recordando la ecuación del impulso lineal de una partícula, (3),

$$m\vec{v}_1 + \int_{t_1}^{t_2} \vec{F}\, dt = m\vec{v}_2,$$

y extendiendola para todas las partículas de un cuerpo rígido B se tiene que

$$\int_B \vec{v}_{P1}\, dm + \int_{B,t_1}^{B,t_2} \vec{F}_P\, dt = \int_B \vec{v}_{P2}\, dm \tag{32}$$

donde P es una partícula arbitraria del cuerpo B y las integrales deben abarcar todas las partículas del cuerpo B. Por un lado, se tiene que

$$\vec{L}_{B1} \equiv \int_B \vec{v}_{P1}\, dm = M\,\vec{v}_{G1} \quad \text{y} \quad \vec{L}_{B2} \equiv \int_B \vec{v}_{P2}\, dm = M\,\vec{v}_{G2}.$$

Por otro lado, se sabe que la contribución de las fuerzas internas al cuerpo rígido al momento lineal del cuerpo rígido es nula, de manera que unicamente es necesario considerar las fuerzas externas, de aquí que

$$\int_{B,t_1}^{B,t_2} \vec{F}_P\, dt = \sum_{Fue_{ext}}^{B} \left(\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{ext}\, dt \right)$$

De manera que la ecuación de impulso lineal para el cuerpo B se reduce a

$$M\,\vec{v}_{G1} + \sum_{Fue_{ext}}^{B} \left(\int_{t_1}^{t_2} \vec{F}_{ext}\, dt \right) = M\,\vec{v}_{G2}. \tag{33}$$

La ecuación (33) representa la ecuación de impulso lineal del cuerpo B. De manera semejante, recordando la ecuación del impulso angular de una partícula, P, respecto a un punto O,

$$m\vec{r}_{P/O} \times \vec{v}_{P_1} = \vec{r}_{P/O} \times \vec{F}_P + m\vec{r}_{P/O} \times \vec{v}_{P_2}.$$

y extendiendola para todas las partículas de un cuerpo rígido B se tiene que

$$\int_B \vec{r}_{P/O} \times \vec{v}_{P_1}\, dm + \int_{B,t_1}^{B,t_2} \vec{r}_{P/O} \times \vec{F}_P\, dt = \int_B \vec{r}_{P/O} \times \vec{v}_{P_2}\, dm \tag{34}$$

donde las integrales deben abarcar todas las partículas del cuerpo B. Por un lado, se tiene que

$$\begin{aligned}\vec{H}_{O,B1} &\equiv \int_B \vec{r}_{P/O} \times \vec{v}_{P_1}\, dm = M\vec{r}_{G/O} \times \vec{v}_{G1} + I_G\, \vec{\omega}_1 \\ \vec{H}_{O,B2} &\equiv \int_B \vec{r}_{P/O} \times \vec{v}_{P_2}\, dm = M\vec{r}_{G/O} \times \vec{v}_{G2} + I_G\, \vec{\omega}_2.\end{aligned}$$

Por otro lado, se sabe que la contribución de las fuerzas internas al cuerpo rígido al momento angular del cuerpo rígido es nula, de manera que unicamente es necesario considerar las fuerzas externas, de aquí que

$$\int_{B,t_1}^{B,t_2} \vec{r}_{P/O} \times \vec{F}_P\, dt = \sum_{Fue_{ext}}^{B} \left(\int_{t_1}^{t_2} \vec{r}_{P/O} \times \vec{F}_{ext}\, dt \right).$$

De manera que la ecuación de impulso angular para el cuerpo B, respecto a un punto arbitrario O, se reduce a

$$M\vec{r}_{G/O} \times \vec{v}_{G1} + I_G\, \vec{\omega}_1 + \sum_{Fue_{ext}}^{B} \left(\int_{t_1}^{t_2} \vec{r}_{P/O} \times \vec{F}_{ext}\, dt \right) = M\vec{r}_{G/O} \times \vec{v}_{G2} + I_G\, \vec{\omega}_2. \qquad (35)$$

La ecuación (35) representa la ecuación de impulso angular del cuerpo B.

7 Problemas Propuestos.

En esta sección se presentarán algunos problemas propuestos de aplicación del método de impulso y cantidad de movimiento y su solución detallada.

Problema 1. Un volante de $400\, lbm$ se encuentra en reposo cuanso se le aplica un par constante de $18\, lbf - pie$. Se observa que son necesarios $4.3\, min$ para que el volante alcance su velocidad máxima de $2400\, r.p.m.$ Si el radio de giro del volante es de $14\, pulg.$ determine la magnitud promedio del par debido a la fricción cinética presente en los cojinetes. [1]

Solución. Los datos del problema, se denominan a continuación

$$M = 400\, lbm \quad \vec{T} = 18\, lbf - pie\, \hat{k} = 579.6\, lbm - pie^2/s^2\, \hat{k} \quad \Delta\, t = 4.3\, min = 258\, s$$
$$\vec{\omega}_2 = 2400\, r.p.m.\, \hat{k} = 251.32\, rad/s\, \hat{k} \qquad k = 14\, pulg = 1.1666\, pie$$

El impulso angular inicial y final están dados por

$$\vec{H}_{G1} = I_G\, \vec{\omega}_1 = \vec{0} \qquad \vec{H}_{G2} = I_G\, \vec{\omega}_2 = M\, k^2 \vec{\omega}_2$$

Por otro lado el impulso angular está dado por

$$\sum_{Fue_{ext}}^{B} \left(\int_{t_1}^{t_2} \vec{r}_{P/O} \times \vec{F}_{ext}\, dt \right) = \left(\vec{T} - \vec{T}_f \right)\, \Delta\, t$$

[1] Este es el Problema 17.43 del libro *Mecánica Vectorial Para Ingenieros, Dinámica. Beer, F.P., Johnston, E.R. y Clausen, W.E., Octava edición, McGraw Hill: México D.F.*

Por lo tanto, la ecuación del impulso y cantidad de movimiento

$$\vec{H}_{G1} + \sum_{Fue_{ext}}^{B} \left(\int_{t_1}^{t_2} \vec{r}_{P/O} \times \vec{F}_{ext}\, dt \right) = \vec{H}_{G2}$$

o

$$\vec{0} + \left(\vec{T} - \vec{T}_f \right) \Delta\, t = I_G\, \vec{\omega}_2 = M\, k^2\, \vec{\omega}_2$$

donde $\vec{T}_f = T_f\, \hat{k}$ es el promedio del par debido a la fricción cinética y $\vec{T} = T\, \hat{k}$. Esta ecuación vectorial se reduce a una ecuación escalar dada por

$$(T - T_f)\, \Delta\, t = M\, k^2\, \omega_2$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} T_f &= T - \frac{M\, k^2\, \omega_2}{\Delta\, t} = 579.6\, lbm - pie^2/s^2 - \frac{(400\, lbm)\, (1.1666\, pie)^2\, (251.32\, rad/s)}{258\, s} \\ &= 49.25808\, lbm - pie^2/s^2 = 1.529\, lbf - pie \end{aligned}$$

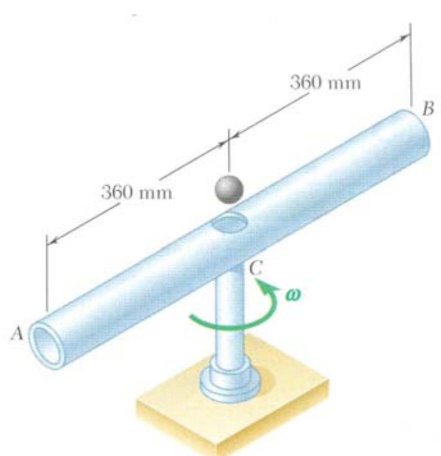

Figure 3: Tubo rotatorio con esferas deslizantes.

Problema 2. Dos bolas de $0.36\, Kgm.$ se introducen en forma sucesiva por el centro C del tubo delgado AB de $1.8\, Kgm.$ Si en el momento que la primera bola se introduce en el tubo la velocidad angular de éste es de $8\, rad./s.$, y se ignora el efecto de la fricción, determine la velocidad angular del tubo justo después de que *a)* la primera bola ha salido del tubo, *b)* la segunda bola sale del tubo.[2]

Solución. Los datos del problema son

1. Masa del tubo, $M = 1.8\, Kgm.$

[2]Este es el Problema 17.74 del libro *Mecánica Vectorial Para Ingenieros, Dinámica. Beer, F.P., Johnston, E.R. y Clausen, W.E., Octava edición, McGraw Hill: México D.F.*

2. Masa de la esfera, $m = 0.36\, Kgm. = M/5$.

3. Longitud del tubo, $L = 0.72\, m$.

4. Velocidad inicial del tubo, $\vec{\omega_1} = 8\, rad/s.\, \hat{k}$

Es importante notar que considerando el punto C, es importante notar que despreciando la fuerza de fricción entre la esfera y el tubo, la unica fuerza que actua sobre el sistema es la fuerza de gravedad que pasa es perpendicular al plano de movimiento y por lo tanto, no incrementa el impulso angular del sistema respecto al punto C; por lo tanto, se aplica la ley de conservación del impulso angular

$$\vec{H}_{C1} = \vec{H}_{C2}$$

Para la primera parte del fenómeno, donde[3]

$$I_C = \frac{1}{12} M\, L^2$$

se tiene que

$$\vec{H}_{C1} = I_C\, \vec{\omega}_1 = \frac{1}{12} M\, L^2\, \vec{\omega}_1 = \frac{1}{12} M\, L^2\, \omega_1\, \hat{k}$$

Por otro lado, para cuando la primera esfera sale del tubo, digamos del extremo B, y estableciendo que $\vec{r}_{B/C} = \frac{1}{2} L\, \hat{i}$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\vec{H}_{C2} &= I_C\, \vec{\omega}_2 + m\, \vec{r}_{B/C} \times \left[\vec{\omega_2} \times \vec{r}_{B/C}\right] = \frac{1}{12} M\, L^2\, \vec{\omega}_2 + \frac{1}{5}\, M\, \frac{1}{2} L\, \hat{i} \left[\vec{\omega_2} \times \frac{1}{2} L\, \hat{i}\right] \\
&= \frac{1}{12} M\, L^2\, \omega_2\, \hat{k} + \frac{1}{5}\, M\, \frac{1}{2} L\, \hat{i} \left[\omega_2 \hat{k} \times \frac{1}{2} L\, \hat{i}\right] = \frac{1}{12} M\, L^2\, \omega_2\, \hat{k} + \frac{1}{20}\, M\, L^2 \omega_2\, \hat{k} \\
&= \frac{2}{15} M\, L^2\, \omega_2\, \hat{k}
\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{12} M\, L^2\, \omega_1\, \hat{k} = \frac{2}{15} M\, L^2\, \omega_2\, \hat{k}$$

y

$$\omega_2 = \frac{5}{8} \omega_1 = \frac{5}{8}\, 8\, rad/s. = 5\, rad/s.$$

Para la segunda esfera, se tiene que

$$\vec{H}^*_{C2} = \vec{H}_{C3}$$

[3] Otra manera de resolver el problema es calcular el momento de inercia, respecto al centro del tubo, del sistema formado por el mismo tubo y la esfera que está a punto de salir por alguno de los extremos del tubo. En este caso, el momento de inercia del sistema respecto al centro del tubo C, está dado por

$$I_C = \frac{1}{12} M\, L^2 + m\, \left(\frac{L}{2}\right)^2 = \frac{1}{12} M\, L^2 + \frac{1}{5} M\, \left(\frac{L}{2}\right)^2 = M\, L^2 \left(\frac{1}{12} + \frac{1}{20}\right) = \frac{2}{15} M\, L^2.$$

Verifique que el mismo resultado se obtiene de esta manera.

Donde, $\vec{H}^*_{C2}$ es el momento angular del sistema cuando la segunda esfera ha salido del tubo[4] y $\vec{H}_{C3}$ es el momento angular del sistema cuando la segunda esfera sale del tubo. Por lo tanto

$$\vec{H}^*_{C2} = \frac{1}{12} M\, L^2\, \omega_2\, \hat{k}$$

y

$$\begin{aligned}\vec{H}_{C3} &= I_C\, \vec{\omega}_3 + m\, \vec{r}_{B/C} \times \left[\vec{\omega}_3 \times \vec{r}_{B/C}\right] = \frac{1}{12} M\, L^2\, \vec{\omega}_3 + \frac{1}{5}\, M\, \frac{1}{2} L\, \hat{i}\, \left[\vec{\omega}_3 \times \frac{1}{2} L\, \hat{i}\right] \\ &= \frac{1}{12} M\, L^2\, \omega_3\, \hat{k} + \frac{1}{5}\, M\, \frac{1}{2} L\, \hat{i}\, \left[\omega_3 \hat{k} \times \frac{1}{2} L\, \hat{i}\right] = \frac{1}{12} M\, L^2\, \omega_3\, \hat{k} + \frac{1}{20}\, M\, L^2 \omega_3\, \hat{k} \\ &= \frac{2}{15} M\, L^2\, \omega_3\, \hat{k}\end{aligned}$$

Por lo tanto

$$\frac{1}{12} M\, L^2\, \omega_2\, \hat{k} = \frac{2}{15} M\, L^2\, \omega_3\, \hat{k}$$

y

$$\omega_3 = \frac{5}{8} \omega_2 = \frac{5}{8}\, 5\, rad/s. = 5\, rad/s. = 3.125\, rad/s.$$

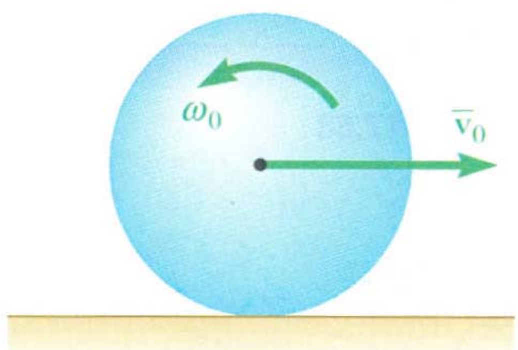

Figure 4: Esfera sujeto a movimiento de rodadura.

Problema 3. Una esfera de radio r y masa m se proyecta a lo largo de una superficie horizontal rugosa con las velocidades iniciales indicadas. Si la velocidad final de la esfera debe de ser cero, exprese *a)* la magnitud requerida de $\vec{\omega}_0$ en términos de v_0 y r, *b)* el tiempo necesario para que la esfera quede en reposo en términos de v_0 y el coeficiente de fricción cinética μ_k.[5]

Solución. Considere el diagrama de cuerpo libre de la esfera que se muestra en la figura 5. De allí puede observarse que las únicas fuerzas que afectan el momento lineal, en

[4] Una suposición importante, que no indica el libro es que la segunda esfera entra al tubo, hasta después que la primera esfera ha salido del tubo.

[5] Este es el Problema 17.69 del libro *Mecánica Vectorial Para Ingenieros, Dinámica. Beer, F.P., Johnston, E.R. y Clausen, W.E., Octava edición, McGraw Hill: México D.F.*

la dirección horizontal, y angular de la esfera respecto al centro de masas, punto G, es la fuerza de fricción. Además, del diagrama de cuerpo libre se tiene que

$$\sum F_y = 0 \qquad - m\, g + N = 0 \qquad \text{or} \qquad N = m\, g.$$

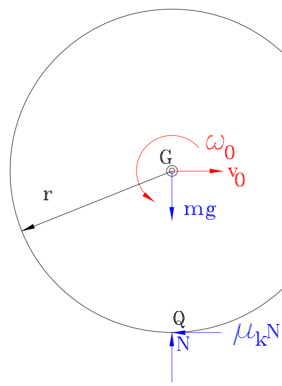

Figure 5: Diagrama de cuerpo libre de una Esfera sujeto a movimiento de rodadura.

En primer lugar, consideraremos la ecuación de impulso lineal en la dirección horizontal, positivo a la derecha. Donde $t = 0$, es el tiempo inicial, $t = t$, es el tiempo final

$$m\, v_0 - \mu_k\, m\, g\, t = m\, (0)\,.$$

En segundo lugar, consideraremos la ecuación de impulso angular respecto al centro de masa, punto G, donde

$$I_G = \frac{2}{5} m\, r^2.$$

La ecuación resulta

$$I_G\, \omega_0\, \hat{k} - \mu_k\, m\, g\, r\, t\, \hat{k} = I_G\, 0\, \hat{k}$$

De la primera ecuación se tiene que

$$t = \frac{m\, v_0}{\mu_k\, m\, g} = \frac{v_0}{\mu_k\, g}$$

Este es el tiempo que la esfera dura en parar esta dada por esta ecuación y resuelve el inciso *a).* De la segunda ecuación

$$t = \frac{I_G\, \omega_0}{\mu_k\, m\, g\, r} = \frac{\frac{2}{5} m\, r^2\, \omega_0}{\mu_k\, m\, g\, r} = \frac{2\, \omega_0\, r}{5\, \mu_k\, g}$$

Puesto que la velocidad, lineal y angular, de la esfera debe ser nula al final del evento, se tiene que ambos tiempos deben ser iguales, por lo tanto

$$\frac{v_0}{\mu_k\, g} = \frac{2\, \omega_0\, r}{5\, \mu_k\, g}$$

Por lo tanto, la velocidad angular ω_0, está dada por

$$\omega_0 = \frac{5\, v_0}{2\, r}.$$

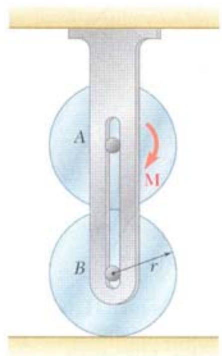

Figure 6: Cilindros Rotatorios Sujetos a Impulso.

Problema 4. Dos cilindros uniformes idénticos de masa m y radio r están en reposo en el tiempo $t = 0$ cuando un par $\vec{M}$ de magnitud constante $M < m\, g\, r$ se aplica al cilindro A. Si el coeficiente de fricción cinética entre el cilindro B y la superficie horizontal es $\mu_k < \frac{M}{2\, m\, g\, r}$ y no ocurre deslizamiento entre los cilindros, obtenga una expresión para la velocidad angular del cilindro B en el tiempo t.[6]

Solución. Considere el diagrama de cuerpo libre de cada uno de los cilindros, aun cuando no se conoce la fuerza de fricción entre los cilindros, se sabe que está presente, y, por simplicidad, se supondrá que tiene un valor constante de F_f.

De la cinemática se sabe que las magnitudes de las velocidades angulares son iguales y de sentidos contrarios, se supondra que

$$\vec{\omega}_A = -\omega_A\, \hat{k}$$

Por lo tanto,

$$\vec{\omega}_B = \omega_A\, \hat{k}$$

Del diagrama de cuerpo libre, es fácil deducir que

$$N_B = 2\, m\, g$$

Las ecuaciones que se necesitan establecer para solucionar el problema son las ecuaciones de momento angular de cada uno de los cilindros respecto a sus centros de masas. Puesto que ambos rodillos están originalmente en reposo, estas ecuaciones están dadas por

$$\vec{0} - M\, t\hat{k} + F_f\, r\, t\, \hat{k} = -\frac{1}{2} m\, r^2\, \omega_A\, \hat{k}$$

[6]Este es el Problema 17.51 del libro *Mecánica Vectorial Para Ingenieros, Dinámica. Beer, F.P., Johnston, E.R. y Clausen, W.E., Octava edición, McGraw Hill: México D.F.*

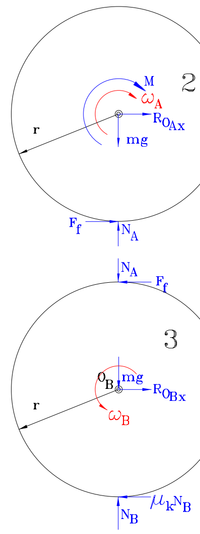

Figure 7: Diagrama de cuerpo libre de dos discos.

y

$$\vec{0} - \mu_k\, 2\, m\, g\, r\, t\hat{k} + F_f\, r\, t\, \hat{k} = \frac{1}{2} m\, r^2\, \omega_A\, \hat{k}$$

De las dos ecuaciones escalares resultantes, despejando el término $F_f\, r\, t$, se tiene que

$$M\, t - \frac{1}{2} m\, r^2\, \omega_A = F_f\, r\, t = \frac{1}{2} m\, r^2\, \omega_A + \mu_k\, 2\, m\, g\, r\, t$$

Empleando, los términos de los extremos, y resolviendo para ω_A, se tiene que

$$M\, t - \mu_k\, 2\, m\, g\, r\, t = m\, r^2\, \omega_A$$

o, finalmente

$$\omega_A = \left(\frac{M}{m\, r^2} - \frac{2\, \mu_k\, m\, g\, r}{m\, r^2} \right) t = \left(\frac{M}{m\, r^2} - \frac{2\, \mu_k\, g}{r} \right) t$$

Problema 5. Cada una de las poleas dobles que se muestran en la figura tiene momento de inercia centroidal de $I_{GA} = I_{GB} = 0.25 Kgm - m^2$, radio interior $r_1 = 100\, mm$ y radio exterior $r_2 = 150\, mm$. Si se ignora la fricción de los cojinetes, determine *a)* la velocidad del cilindro $t_f = 3\, s$ después de soltar el sistema desde el reposo, *b)* la tensión en la cuerda que conecta las poleas.[7]

Solución. Denomine $m = 10 kgm.$ la masa del contrapeso y considere el diagrama de cuerpo libre del sistema. Las ecuaciones que se usarán para resolver el problema son las de momento angular de los tambores A y B y la momento lineal del contrapeso C.

[7]Este es el Problema 17.53 del libro *Mecánica Vectorial Para Ingenieros, Dinámica. Beer, F.P., Johnston, E.R. y Clausen, W.E., Octava edición, McGraw Hill: México D.F.*

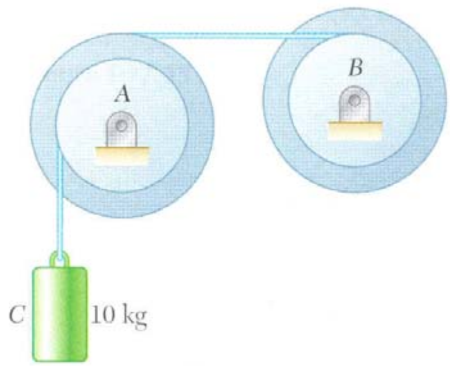

Figure 8: Tambores con contrapeso.

Es necesario notar que, para cualquier instante de tiempo, las velocidades angulares de los tambores son antihorarias y están relacionadas por

$$\omega_A\, r_2 = \omega_B\, r_1 \qquad \text{por lo tanto} \qquad \omega_B = \omega_A\, \frac{r_2}{r_1}.$$

Por otro lado, la velocidad del contrapeso es vertical y hacia abajo y su magnitud está relacionada con la velocidad del tambor A por la ecuación

$$v_{Cy} = \omega_A\, r_1.$$

Estas ecuaciones suponen un tiempo inicial $t_0 = 0\, s.$ y un tiempo final $t_f = 3\, s.$ están dadas por

$$I_{GA}\vec{\omega}_{A0} + T_2\, r_1\, t_f\, \hat{k} - T_1\, r_2\, t_f\, \hat{k} = I_{GA}\vec{\omega}_{Af} \qquad \text{o} \qquad T_2\, r_1\, t_f\, \hat{k} - T_1\, r_2\, t_f\, \hat{k} = I_{GA}\omega_{Af}\, \hat{k}$$

$$I_{GB}\vec{\omega}_{B0} + T_1\, r_1\, t_f\, \hat{k} = I_{GB}\vec{\omega}_{Af} \qquad \text{o} \qquad T_1\, r_1\, t_f\, \hat{k} = I_{GB}\omega_{Af}\hat{k}$$

y

$$(T_2 - m\, g)\; t_f\, \hat{j} = -m\, v_{Cyf}\, \hat{j}$$

De la segunda ecuación, eliminando el vector unitario común y sustituyendo las relaciones cinemáticas, se tiene que

$$T_1 = \frac{I_{GB}\omega_{Bf}}{r_1\, t_f} = \frac{I_{GB}\omega_{Af}\, \frac{r_2}{r_1}}{r_1\, t_f}$$

De la tercera ecuación, eliminando el vector unitario común y sustituyendo las relaciones cinemáticas, se tiene que

$$T_2 = m\, g - \frac{m\, v_{Cyf}}{t_f} = m\, g - \frac{m\, \omega_{Af}\, r_1}{t_f}$$

Sustituyendo estos resultados en la primera ecuación

$$\left(m\, g - \frac{m\, \omega_{Af}\, r_1}{t_f}\right)\, r_1\, t_f - \frac{I_{GB}\omega_{Af}\, \frac{r_2}{r_1}}{r_1\, t_f}\, r_2\, t_f = I_{GA}\omega_{Af}$$

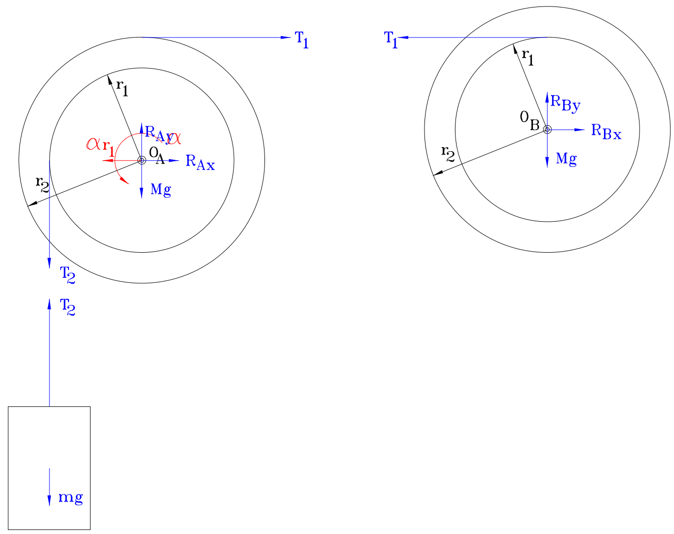

Figure 9: Diagrama de cuerpo libre del sistema formado por tambores con contrapeso.

Despejando la velocidad ω_{Af}, se tiene que

$$\omega_{Af} = \frac{m\,g\,t_f\,r_1}{I_{GA} + I_{GB}\left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2 + m\,r_1^2} = \frac{m\,g\,t_f\,r_1}{I_{GA}\left[1 + \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^2\right] + m\,r_1^2}$$

Sustituyendo los valores de las variables, se tiene que

$$\omega_{Af} = \frac{(10\,kgm.)\left(9.81\,m/s^2\right)(3\,s)\,(0.1m)}{(0.25\,kgm - m^2)\left[1 + \left(\frac{150\,mm.}{100\,mm.}\right)^2\right] + (10\,kgm.)\,(0.1\,m)^2} = 32.25\,\frac{rad.}{s.}$$

Por lo tanto

$$v_{Cyf} = \omega_{Af}\,r_1 = 3.225\,\frac{m}{s}$$

La tensión entre los tambores está dada por

$$T_1 = \frac{I_{GB}\omega_{Af}\,r_2}{r_1^2\,t_f} = \frac{\left(0.25\,kgm - m^2\right)\left(32.25\,\frac{rad.}{s.}\right)(0.15\,m)}{(0.1\,m)^2\,(3\,s)} = 40.31\,\frac{kgm - m}{s^2} = 40.31\,N.$$